جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

مقرر تمثيلات الزمر و الجبور
السنة الرابعة رياضيات (جبر)
الفصل الثاني ٢٠١٦ - ٢٠١٧

المدة: ساعة ونصف
الدرجة: ١٠٠
اسم الطالب:

السؤال الأول:

لتكن V,W فضاءين متجهيين فوق الحقل F ولنفرض أن $dim_F V = n,\ dim_F W = m$. أثبت أن:

$$Hom_F(V,W)\cong M_{mn}(F)$$

السؤال الثاني:

١ – عرف التمثيل الأولي للزمرة.

٢ – ليكن $\rho':G\to GL_F(V')$ و $\rho:G\to GL_F(V)$ تمثيلين أوليين للزمرة G فوق الحقل F بعد كلاً منهما أكبر أو يساوي الواحد. أثبت أنه إذا كان $T:V\to V'$ هو G–تطبيق، عندئذ إما $T=0$ أو أن T تقابلاً.

السؤال الثالث:

لتكن X مجموعة منتهية قدرتها تساوي n و F حقلاً. لنفرض أن $F(X)$ الفضاء المتجهي المؤلف من جميع التطبيقات $f:X\to F$. والمطلوب:

١ – أثبت أن بعد الفضاء $F(X)$ فوق الحقل F يساوي n.

٢ – لتكن G زمرة ولنفرض أن $*:G\times X\to X$ تأثيراً للزمرة G على المجموعة X. أثبت أنه يوجد تمثيل $\rho:G\to GL_F(F(X))$ للزمرة G.

السؤال الرابع:

ليكن V فضاءً متجهياً فوق الحقل F وأن $T:V\to V$ مؤثراً خطياً للفضاء V فوق الحقل F. لنفرض أن V^* الفضاء الثنوي للفضاء V فوق الحقل F. أثبت أن العلاقة $T^*:V^*\to V^*$ المعرفة بالشكل الآتي: أياً كان $f\in V^*$ وأياً كان $v\in V$ فإن:

$$T^*(f)(v)=f(T(v))$$

تشكل مؤثراً خطياً للفضاء V^*.

السؤال الخامس:

١ – أثبت أنه لأجل أي زمرة منتهية يوجد تمثيل.

٢ – لتكن G زمرة تبديلية منتهية و $\rho:G\to GL_F(V)$ تمثيلاً للزمرة G. أثبت أنه أياً كان $g\in G$ فإن المؤثر $\rho(g)$ هو G–تطبيق.

انتهت الأسئلة

سلم تصحيح مقرر مقررات الجبر الخطي والجبر
جبر المانعية رياضيات (جبر)
الفصل الثاني $2016 - 2017$

السؤال الأول: 20 درجة

لنفرض أن $S_V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ قاعدة الفضاء V فوق F و $S_W = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ قاعدة الفضاء W فوق F. لنعرف العلاقة $\varphi : Hom_F(V,W) \to M_{mn}(F)$ بالشكل الآتي: إذا كان $f \in Hom_F(V,W)$ فإن $\varphi(f) = A_f \in M_{mn}(F)$، سنجد أن φ تطبيق حيث إذا كان $f, g \in Hom_F(V,W)$ ونفرض أن $A_f = [\alpha_{ij}]_{mn}$, $A_g = [\beta_{ij}]_{mn}$، إذا كان $f = g$ عندئذ
$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} y_j \;,\; g(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} y_j \;,\; \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in F$$
ولما كان $f(x_i) = g(x_i)$ وبالتالي يكون
$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} y_j = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ji} y_j$$
ومنه فإن $\sum_{j=1}^{m} (\alpha_{ji} - \beta_{ji}) y_j = 0$ ولما كانت S_W مستقلة خطياً نجد أن $\alpha_{ji} - \beta_{ji} = 0$ ومنه $\alpha_{ji} = \beta_{ji}$ لكل i و j وبالتالي فإن
$$\varphi(f) = A_f = [\alpha_{ij}] = [\beta_{ij}] = A_g = \varphi(g)$$
من جهة أخرى لدينا
$$(f+g)(x_i) = f(x_i) + g(x_i) = \sum \alpha_{ji} y_j + \sum \beta_{ji} y_j = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{ji} + \beta_{ji}) y_j$$
ومنه يكون
$$\varphi(f+g) = A_{f+g} = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}] = [\alpha_{ij}] + [\beta_{ij}] = A_f + A_g = \varphi(f) + \varphi(g)$$
ومنه فإن φ تشاكل زمري، وبالمثل نبرهن ...

ولمناقشة أن φ متباين، إذا كان $\varphi(f) = \varphi(g)$ نجد أن
$$[\alpha_{ij}] = A_f = A_g = [\beta_{ij}]$$
ومنه $\alpha_{ij} = \beta_{ij}$ وذلك لكل i و j ومنه نجد أن
$$f(x_i) = \sum \alpha_{ji} y_j = \sum \beta_{ji} y_j = g(x_i)$$
ومنه فإن $f = g$. ولإثبات أن φ غامر نلاحظ أنه إذا كانت $A = [\alpha_{ij}]_{mn} \in M_{mn}(F)$ فإن
$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{j1} y_j = \alpha_{11} y_1 + \alpha_{21} y_2 + \dots + \alpha_{m1} y_m \in W$$
$$\sum \alpha_{j2} y_j = \alpha_{12} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \dots + \alpha_{m2} y_m \in W$$
$$\vdots$$
$$\sum \alpha_{jn} y_j = \alpha_{1n} y_1 + \alpha_{2n} y_2 + \dots + \alpha_{mn} y_m \in W$$
لنعرف العلاقة $T : V \to W$ بالشكل
$$T(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} y_j$$
نجد أن $T \in Hom_F(V,W)$ وأن $\varphi(T) = [\alpha_{ij}] = A$ ومنه فإن φ غامر.

السؤال الثاني: 20 درجة

1- لنتكلم عن التمثيل $\rho : G \to GL_F(V)$ أنه غير قابل للاختزال إذا لم يكن له فضاءات جزئية مستقرة سوى $\{0\}$ و V.

2- إن $Ker(T)$ فضاء جزئي من V وهو مستقر تحت G لأنه إذا كان $\omega \in Ker(T)$ فإن $\rho'(g)(T(\omega)) = \rho'(g)(0) = 0$ وذلك لأن T هو G-تطبيق فإن $T(\rho(g)(\omega)) = (T\rho(g))(\omega)$ ومنه نجد أن $T\rho(g) = \rho'(g)T$ وبالتالي $\rho(g)(Ker(T)) \subseteq Ker(T)$ ولما كان التمثيل ρ أولياً نجد أن إما $Ker(T) = 0$ أو أن $Ker(T) = V$، إذا كان $Ker(T) = V$ فإن $T = 0$ وبالتالي تكون انتهى البرهان. لنفرض أن $Ker(T) = 0$ عندئذ فإن T متباين.
من جهة أخرى إن $Im(T)$ فضاء جزئي من V' وهو مستقر تحت G لأنه إذا كان $g \in G$ وكان $\omega' \in Im(T)$ فإن $\omega' = T(\omega)$ حيث $\omega \in V$ وأن
$$\rho'(g)(\omega') = \rho'(g)(T(\omega)) = T\rho(g)(\omega) \in Im(T)$$
ولما كان التمثيل ρ' أولياً فإن إما $Im(T) = 0$ أو أن $Im(T) = V'$ ولما كان $T \neq 0$ فإن $Im(T) \neq 0$ وبالتالي يكون $Im(T) = V'$ أي أن T غامر ومنه نجد أن T تشاكل.

السؤال الثالث: ٣ درجات (١٥+١٥)

أ) من أجل $x \in X$ نعرّف العنصر $e_x : X \to F$ بالشكل الآتي: أيا كان y فإن $e_x(y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$ فنجد أن e_x تطبيق على X ومنته ثابت $e_x \in F(X)$. لنلاحظ أن الجملة $S = \{e_x : x \in X\}$ تولد الفضاء $F(X)$

ليكن $f \in F(X)$، عندئذ أيا كان $y \in X$ فإن $f(y) \in F$ ومنه نجد أن $f(y) = f(y) \cdot 1 = f(y) e_y(y)$، لنضع $f(y) = \alpha_y$ فنجد أن

$$f(y) = f(y) e_y(y) = \alpha_y e_y(y) = \sum_{x \in X} \alpha_y e_x(y) =$$
$$= \sum_{x \in X} (\alpha_y e_x)(y) = \left(\sum_{x \in X} \alpha_y e_x\right)(y)$$

ولهذا فإن $f = \sum_{x \in X} \alpha_y e_x$ وهذا يبرهن أن الجملة S تولد الفضاء $F(X)$

و F وهي مستقلة خطياً لتكن $\alpha_x \in F$ بحيث $\sum_{x \in X} \alpha_x e_x = 0$ فأيا كان $y \in X$ فإن

$\left(\sum_{x \in X} \alpha_x e_x\right)(y) = 0$ ومنه $\sum_{x \in X} (\alpha_x e_x)(y) = 0$ وبالتالي $\sum_{x \in X} \alpha_x e_x(y) = 0$ ومنه نجد أن $\alpha_y = 0$

من أجل $y \in X$ وهذا يعني أن الجملة S مستقلة خطياً فوق F ومنه فإن

$$\dim_F F(X) = \operatorname{card} S = n.$$

ب- لنعرّف عندئذ $\rho : G \to GL_F(F(X))$ بالشكل الآتي: أيا كان $f \in F(X)$ نضع $\rho(g)(f) : X \to F$ وأيا كان $x \in X$ نضع $\rho(g)(f)(x) = f(g^{-1} * x)$. نجد أن ρ تطبيق لأنه إذا كان $g_1, g_2 \in G$ بحيث $g_1 = g_2$ فإن $g_1^{-1} = g_2^{-1}$ ومنه أيا كان $x \in X$ فإن $g_1^{-1} * x = g_2^{-1} * x$ ومنه أيا كان $f \in F(X)$ فإن $f(g_1^{-1} * x) = f(g_2^{-1} * x)$ وبالتالي يكون

$$\rho(g_1)(f)(x) = \rho(g_2)(f)(x)$$

وذلك أيا كان $f \in F(X)$ وأيا كان $x \in X$ ومنه فإن $\rho(g_1) = \rho(g_2)$،

إن ρ تشاكل زمري لأن أيا كان $g_1, g_2 \in G$ فإن $g_1 \cdot g_2 \in G$ وبالتالي $(g_1 \cdot g_2)^{-1} \in G$

أي أن $g_2^{-1} \cdot g_1^{-1} \in G$ ومنه أيا كان $x \in X$ فإن

$$(g_1 \cdot g_2)^{-1} * x = (g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}) * x = g_2^{-1} * (g_1^{-1} * x)$$

ومنه أيا كان $f \in F(X)$ فإن

$$f((g_1 \cdot g_2)^{-1} * x) = f(g_2^{-1} * (g_1^{-1} * x))$$

وبالتالي فإن

$$\rho(g_1 \cdot g_2)(f)(x) = f((g_1 g_2)^{-1} * x)$$
$$= f(g_2^{-1} * (g_1^{-1} * x)) = \rho(g_2)(f)(g_1^{-1} * x) = \rho(g_1)(\rho(g_2)(f)(x))$$
$$= \rho(g_1) \cdot \rho(g_2)(f)(x)$$

وذلك أيا كان $f \in F(X)$ وأيا كان $x \in X$ ومنه فإن $\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) \cdot \rho(g_2)$،

ومنه فإن ρ تمثيل للزمرة G.

السؤال الرابع: (١٥) د (ب)

لنبرهن أولاً أن T^* تطبيق، ليكن $f, g \in V^*$ بحيث $f = g$ عندئذ أيا كان $v \in V$ فإن $T(v) \in V$

ومنه فإن $f(T(v)) = g(T(v))$ وهذا يبرهن أن $T^*(f)(v) = T^*(g)(v)$ ومنه نجد أن

$T^*(f) = T^*(g)$ وذلك أيا كان

$$T^*(f+g)(v) = (f+g)(T(v)) =$$
$$= f(T(v)) + g(T(v)) = T^*(f)(v) + T^*(g)(v)$$
$$= (T^*(f) + T^*(g))(v)$$

وذلك أيا كان $v \in V$ ومنه نجد أن

$$T^*(f+g) = T^*(f) + T^*(g)$$

لنبرهن أيا كان $\alpha \in F$ فإن

$$T^*(\alpha f)(v) = (\alpha f)(T(v)) =$$
$$= \alpha \cdot f(T(v)) = \alpha \cdot T^*(f)(v) = (\alpha T^*(f))(v)$$

وبالتالي يكون $T^*(\alpha f) = \alpha T^*(f)$ أي أن T^* هو مؤثر خطي على الفضاء V^*،

(٥) د (ب)

السؤال الخامس:

- لتكن G زمرة منتهية من المرتبة n عندئذ تكون زمرة التناظر الحرة S_n للزمرة هي الزمرة التناظرية لمجموعة الزمرة التناظرية S_n ذات عنصر تمثيل. فإنه يوجد تشاكل زمري $T : G \to S_n$ أيا كان $g \in G$ $T(g) = T_g$ ومنه يوجد تشاكل زمري $f : S_n \to GL_F(V)$، لنعتبر $f \circ T : G \to GL_F(V)$ فنجد أنه هو تشاكل زمري وبالتالي هو تمثيله لـ G (٥ درجات)

، $\rho(g) = \rho \cdot T(g) = \rho(Tg)$ ويتحقق الشرط

$h \in G$ نثبت أن ... [illegible] ... $T = \rho(g) : V \to V$ ... لكل $g \in G$ ... [illegible]

$$\rho(h) \cdot T = T \rho(h)$$

ليكن $w \in V$ ... [illegible]

$$(\rho(h) \cdot T)(w) = \rho(h)(T(w)) = \rho(h)(\rho(g)(w)) =$$

$$= \rho(h)\rho(g)(w) = \rho(h \cdot g)(w) = \rho(gh)(w) =$$

$$= (\rho(g) \cdot \rho(h))(w) = \rho(g)(\rho(h)(w)) = T(\rho(h)(w))$$

$$= (T \cdot \rho(h))(w) \Rightarrow \rho(h) \cdot T = T \cdot \rho(h).$$